EXPÉRIENCES DE PHYSIQUE

J.-P. BELLIER • C. BOULOY • D. GUÉANT

EXPÉRIENCES DE PHYSIQUE

ÉLECTRICITÉ, ÉLECTROMAGNÉTISME, ÉLECTRONIQUE, TRANSFERTS THERMIQUES

CAPES/CAPLP/AGRÉGATION
PHYSIQUE/CHIMIE

4e ÉDITION

DUNOD

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-075957-6

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage en deux tomes, s'adresse principalement aux étudiants en master « spécialité Enseignement des sciences physiques » et candidats aux concours internes et externes de recrutement de l'éducation nationale (CAPLP, CAPES, Agrégation) mais nos collègues enseignants peuvent aussi l'utiliser, de nombreuses expériences pouvant être mises à profit lors de cours ou de TP. De même les étudiants des masters « sciences » et de classes préparatoires peuvent y trouver un intérêt certain.

Cette édition a été profondément remaniée, pour tenir compte de l'évolution des concours. De nouveaux chapitres ont été ajoutés et les contenus des anciens fortement modifiés aussi bien en ce qui concerne les rappels théoriques, les propositions d'expériences que les exercices et problèmes.

Cet ouvrage regroupe les thèmes concernant l'électricité, l'électromagnétisme, l'électronique et les transferts thermiques.

Un second des mêmes auteurs est consacré à l'optique, la mécanique, les ondes et la mécanique des fluides.

Nous n'avons pas voulu suivre un programme précis de concours, ceux-ci évoluant avec le temps, mais avons choisi les principaux thèmes que tout étudiant devrait maîtriser au sortir du master.

Les nombreux rappels théoriques et exercices traités pour chacun des thèmes abordés devraient constituer une base de travail aussi bien pour la préparation des épreuves de physique des concours que dans le cadre des études. En effet, nous avons essayé de présenter, autour d'un thème expérimental, d'une part les notions indispensables à connaître et d'autre part des exercices s'y rapportant.

Les exercices choisis sont de deux « niveaux » :

- soit de niveau baccalauréat car il est indispensable que tout candidat ou étudiant puisse sans effort résoudre ce type de problème.
- soit de niveau CAPES ou école d'ingénieur.

Chaque chapitre donne la priorité au domaine expérimental en vue d'aider le candidat à préparer la difficile épreuve orale des concours où intervient la présentation d'expériences. Les expériences décrites dans cet ouvrage, avec un mode opératoire détaillé, font le plus souvent appel au matériel « standard » que l'on trouve dans les établissements de l'enseignement secondaire ; matériel distribué par les fournisseurs habituels à savoir : Jeulin, Pierron, Leybold, 3B Scientific, Metrix, etc.

Concernant le matériel ExAO, la société Métrodis reprend une bonne partie du catalogue de la société Micrelec qui distribuait les interfaces et les capteurs de la gamme ORPHY. Cette nouvelle société distribue notamment l'interface ORPHYLAB, son logiciel d'acquisition et de traitement (Modélis 2) et l'ensemble des capteurs utilisés dans cet ouvrage. Les manipulations que nous proposons avec l'interface ORPHY GTI sont parfaitement transposables avec l'ORPHYLAB. De plus la gestion des capteurs et le paramétrage des acquisitions se fait de manière plus intuitive.
Pour ce qui est du traitement des données, nous sommes restés fidèles au logiciel Regressi qui est téléchargeable gratuitement et en constante évolution grâce à son concepteur Jean Michel Millet. Adresse internet : http://jean-michel.millet.pagesperso-orange.fr et http://regressi.fr/WordPress.

Ce logiciel gère toutes les interfaces de la gamme ORPHY et est capable de traiter les données issues des oscilloscopes numériques les plus courants (Metrix, Tektronix, HP, Agilent, Keysight, etc.) et de nombreux spectrophotomètres (Secomam, Safas, Cecil, Shimadzu, Jenway, etc.). Les modules Vidéo et Son permettent aussi de traiter des fichiers de type AVI et WAV. De plus, un module permet de récupérer les données issues d'une tablette graphique.
Nous utilisons aussi quelques logiciels libres de droits comme Aviméca, Avistep, Audacity, VLC.
Chaque thème de cet ouvrage répond très largement aux exigences de l'intitulé d'un sujet d'une épreuve orale. Ces intitulés étant généralement assez ouverts, diverses approches sont possibles pour aborder une expérience le jour de l'épreuve ; au candidat de faire des choix judicieux parmi celles proposées pour bâtir de façon cohérente son exposé tout en respectant le niveau de classe imposé par son sujet et en justifiant ses choix dans le cadre d'une pratique professionnelle. Attention, tout expérimentateur sait qu'une manipulation d'apparence simpliste peut révéler de mauvaises surprises lors de sa réalisation, aussi toutes les expériences décrites dans cet ouvrage doivent être travaillées durant la préparation à l'épreuve du concours.
Nous souhaitons que cet ouvrage puisse aider les candidats dans la préparation aux concours, les étudiants dans l'acquisition des compétences indispensables au sortir d'un master et les collègues dans leur pratique professionnelle quotidienne.

Les auteurs

MESURE DE GRANDEURS, UNITÉS, ÉQUATIONS AUX DIMENSIONS, INCERTITUDES

1

1.1 GRANDEUR MESURABLE

1.1.1 Définition

Lorsqu'on parle de mesurer une grandeur ou d'une grandeur mesurable, on associe intuitivement à cette grandeur un nombre. Par exemple, mesurer la longueur d'une table revient à associer à cette longueur un nombre qui la définira.
La mesure d'une grandeur est l'opération qui fait correspondre un nombre à cette grandeur.
Ci-dessous, deux citations d'un physicien anglais du XIX^{e} siècle, Sir William Thomson anobli (et plus connu) sous le nom de Lord Kelvin ; citations qui illustrent bien l'importance de la mesure :
« Si vous ne pouvez mesurer, vous ne pouvez améliorer. »
« En science physique, la première étape essentielle pour la connaissance de n'importe quel sujet est de trouver des procédés de mesure et des méthodes pratiques pour estimer leurs qualités. Je dis souvent que quand vous pouvez mesurer ce dont vous parlez et l'exprimer par un nombre, vous connaissez quelque chose à son sujet mais, quand vous ne pouvez pas le mesurer, quand vous ne pouvez pas l'exprimer par un nombre, votre connaissance est faible et non satisfaisante ; cela peut être le début de la compréhension mais vous avez peu avancé dans vos réflexions sur l'état de la Science, quelle que soit la question. » (PLA, vol. 1 « Unités électriques de mesure » 3 mai 1883)

1.1.2 Conditions pour qu'une grandeur soit mesurable

D'après la définition, il faut qu'un seul nombre suffise pour caractériser la grandeur, ainsi un vecteur, par exemple, n'est pas mesurable.
De plus, on doit pouvoir comparer les grandeurs de même espèce donc l'ensemble des grandeurs d'une même nature doit être ordonné et additif.

Ordonné : on doit pouvoir appliquer la relation « est plus grande que » à l'ensemble des grandeurs et cette relation doit posséder toutes les propriétés de l'opération mathématique correspondante, en particulier :

$$[A] > [B] \text{ et } [B] > [C] \text{ alors } [A] > [C]$$

Additif : on doit pouvoir appliquer une relation « somme » à l'ensemble des grandeurs et cette relation doit posséder toutes les propriétés de l'opération mathématique correspondante, en particulier :

$$[A] + [B] = [B] + [A]$$
$$([A] + [B]) + [C] = [A] + ([B] + [C])$$

1.1.3 Remarque : grandeur repérable

À certaines grandeurs, on ne peut appliquer une relation « somme », ainsi, si on ajoute à un litre d'eau à 20 °C, un litre d'eau à 30 °C, on obtient bien deux litres d'eau mais pas à 50 °C ! La température n'est pas une grandeur mesurable, c'est une grandeur repérable. On utilise pour classer (« mesurer ») ces grandeurs, une échelle (échelle de température dans ce cas) définie par une origine. Il en est de même, par exemple, pour la dureté (échelle de Mohs), la date (échelle de temps), l'énergie potentielle (échelle d'énergie...).

1.2 Unités

1.2.1 Mesure d'une grandeur

Si, arbitrairement, pour une espèce donnée, on définit une grandeur de référence appelée unité [u], la mesure de la grandeur [A] appartenant à l'espèce sera :

$$[A] = A[u]$$

où A représente la mesure de la grandeur [A] avec l'unité [u].

1.2.2 Choix de l'unité

On demande à l'unité d'être bien définie et d'être commode c'est-à-dire de se prêter à une expression aussi simple que possible des phénomènes.

Par exemple, comme unité de temps, on préfère prendre le temps séparant 2 battements consécutifs du balancier d'une horloge plutôt que le temps séparant 2 battements de cœur pour des raisons évidentes de commodités.

La définition d'une unité évolue au fur et à mesure que la précision des mesures se développe, ainsi pour le temps on est passé d'une définition « macroscopique » (temps des éphémérides) à une définition « microscopique » (temps atomique).

1.2.3 Changement de l'unité

Mesurons une même grandeur [A] avec deux unités différentes [u] et [u′], nous aurons :

$$[A] = A[u] \text{ et } [A] = A'[u'] \text{ soit } A[u] = A'[u'] \text{ ou } A/A' = [u']/[u]$$

Le rapport des mesures d'une même grandeur est égal à l'inverse du rapport des unités correspondantes.
Ceci est la base des calculs de changements d'unités.

1.2.4 Système d'unités

Les lois de la physique et en particulier celles de la mécanique se traduisent, le plus souvent, par des relations de proportionnalité.
Construire un système d'unités cohérent, c'est choisir un système dans lequel le plus grand nombre des coefficients de proportionnalité sera égal à l'unité.
Si on prend l'expression reliant force, masse et accélération, $F = k.m.a$, k étant une constante ; pour construire un système cohérent, dans lequel le maximum de constantes sera égal à 1, si on choisit arbitrairement les unités de force et de masse, l'unité d'accélération sera imposée.
Les unités choisies arbitrairement sont appelées unités de base ou unités indépendantes, les autres unités sont les unités dérivées.
En France le système d'unités utilisé est le système international (SI) basé sur sept grandeurs de base qui s'exprime dans une unité :

Grandeur	Unité	Symbole
Longueur	le mètre	m
Masse	le kilogramme	kg
Temps	la seconde	s
Intensité de courant électrique	l'ampère	A
Température thermodynamique	le kelvin	K
Quantité de matière	la mole	N
Intensité lumineuse	la candela	cd

Chacune de ces unités a une définition extrêmement précise, définie par la conférence générale des poids et mesures qui se réunit à Paris tous les 4 ans et gérée par le bureau international des poids et mesures. Ci-après, les définitions :
Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde.
Le kilogramme est l'unité de masse ; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme.

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.
L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2×10^{-7} newtons par mètre de longueur.
Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.
La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12. Lorsqu'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules.
La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian.
On peut remarquer qu'une seule unité est, aujourd'hui, encore reliée à un étalon matériel, le kilogramme. En 2018, une redéfinition devrait intervenir, basée sur des constantes universelles.

1.2.5 Unités dérivées

Toutes les autres grandeurs sont des grandeurs dérivées et s'expriment à l'aide d'unités dérivées. Le tableau ci-dessous donne quelques exemples.

Grandeur dérivée	Symbole	Unité dérivée	Symbole
Volume	V	mètre cube	m^3
Vitesse	v	mètre par seconde	$m.s^{-1}$
Masse volumique	ρ	kilogramme par mètre cube	$kg.m^{-3}$

Certaines unités dérivées ont reçu un nom spécial pour simplifier. Le tableau ci-dessous donne quelques exemples.

1.2.6 Unités hors système

La pratique ou la commodité veut qu'on utilise assez souvent des unités hors du système international. Dans la mesure du possible, il faut combattre ce fait et utiliser les unités du système international. Le tableau ci-dessous donne quelques exemples.

Unité dérivée	Nom	Symbole
Angle plan	radian	rad
Angle solide	stéradian	sr
Fréquence	hertz	Hz
Énergie, Travail	joule	J
Température Celsius	degré Celsius	°C
Différence de potentiel électrique	volt	V
Éclairement lumineux	lux	lx

Grandeur	Unité	Symbole	Valeur en unité SI
Temps	minute	min	1 min = 60 s
Volume	litre	L, l	1 L = 10^{-3} m^3
Pression	bar	bar	1 bar = 10^5 Pa
Longueur	angström	Å	Å = 10^{-10} m

1.3 Équations aux dimensions

1.3.1 Définition

Considérons deux systèmes d'unités. Les unités fondamentales sont différentes mais les relations de définition des unités dérivées sont les mêmes. Par exemple la force est liée à la masse et à l'accélération par la relation [F] = [M] × [A] dans les deux systèmes. Affectons l'indice 1 au premier système et l'indice 2 au second. La relation liant la force, la masse et l'accélération s'écrit : $f_1 = m_1 \times a_1$ et $f_2 = m_2 \times a_2$. En divisant membre à membre on obtient :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{a_2}{a_1} \tag{1}$$

Or le rapport f_2/f_1 que nous posons égal à F est le rapport des mesures d'une force dans les deux systèmes. C'est donc l'inverse du rapport des unités de forces des deux systèmes d'où l'intérêt de ce rapport dans les problèmes de changement d'unités. Posons de même $m_2/m_1 = M$ et $a_2/a_1 = A$. L'équation (1) devient $F = M \times A$ notée aussi [F] = [M] × [A] ou $\dim(F) = \dim(M) \times \dim(A)$, c'est ce qu'on appelle l'équation aux dimensions de la force en fonction de la masse et de l'accélération.

Nous pouvons maintenant exprimer les grandeurs dérivées en fonction des grandeurs fondamentales. Nous obtiendrons ainsi les équations aux dimensions des diverses grandeurs en fonction des grandeurs fondamentales. Le tableau ci-dessous donne les équations aux dimensions des principales grandeurs mécaniques et électriques.

Grandeur	Définition	Dimension
LONGUEUR	l	L
Volume	$V = l^3$	L^3
TEMPS	T	T
Fréquence	$f = 1/t$	T^{-1}
Vitesse linéaire	$v = \ell/t$	LT^{-1}
Accélération linéaire	$a = v/t$	LT^{-2}
Angle	θ	1
Vitesse angulaire	$\omega = \theta/t$	T^{-1}
Accélération angulaire	$\alpha = \omega/t$	T^{-2}
MASSE	M	M
Masse volumique	$\rho = m/V$	ML^{-3}
Force	$f = m.a$	MLT^{-2}
Quantité de mouvement	$p = m.v$	MLT^{-1}
Pression	$P = f/s$	$ML^{-1}T^{-2}$
Travail	$W = f.l$	ML^2T^{-2}
Puissance	$P = f/t$	ML^2T^{-3}
INTENSITÉ Électrique	I	I
Charge	$q = i.t$	IT
Potentiel	$V = W/q$	$ML^2T^{-3}I^{-1}$
Résistance	$R = V/i$	$ML^2T^{-3}I^{-2}$
Capacité	$C = q/V$	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$

1.3.2 Application au changement d'unités

Si nous voulons exprimer dans un système 2 la mesure d'une grandeur dont nous connaissons la mesure dans un système 1 nous pouvons utiliser les équations de dimensions. Considérons par exemple le cas de la force. Nous avons :

$$\frac{f_2}{f_1} = F = \mathrm{MLT}^{-2} = \frac{\mathrm{Um}_1}{\mathrm{Um}_2}\frac{\mathrm{U}\ell_1}{\mathrm{U}\ell_2}\left(\frac{\mathrm{Ut}_1}{\mathrm{Ut}_2}\right)^{-2} = \frac{\mathrm{Uf}_1}{\mathrm{Uf}_2}$$

avec Um_1 = Unité de masse dans le système 1, $\mathrm{U}\ell_1$ = Unité de longueur dans le système 1, ..., puisque le rapport des mesures d'une grandeur quelconque est l'inverse du rapport des unités.

> ***Exemple***
> Le système britannique a pour grandeurs fondamentales le temps (unité : la seconde), la force (unité : la « livre », 1 livre = 4,45 N), la longueur (unité : le « pied », 1 pied = 0,305 m) Exprimer dans le système international, l'unité de masse de ce système (qui s'appelle le « slug »).

Affectons de l'indice 1 les mesures du système britannique et de l'indice 2 celles du système international. L'équation de dimensions de la force ne change pas on a donc :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{m_2}{m_1}\frac{\ell_2}{\ell_1}.\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{-2}$$

Soit $\frac{m_2}{m_1} = \frac{f_2}{f_1}\frac{\ell_1}{\ell_2}.\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{-2} = \frac{4,45}{1}\frac{1}{0,305} = 14,6$ d'où $\frac{m_2}{m_1} = \frac{Um_1}{Um_2}$ donc slug/kg = 14,6 soit 1 slug = 14,6 kg.

1.3.3 Homogénéité

Les deux membres d'une équation littérale ou les divers termes d'une somme, représentent forcément des grandeurs de même nature. Ils doivent donc avoir les mêmes dimensions. Cette condition d'homogénéité, évidemment insuffisante pour que la formule considérée soit juste, est toutefois nécessaire. Aussi est-il souvent prudent de vérifier l'homogénéité d'un résultat littéral avant de passer à une application numérique. Si l'équation trouvée n'est pas homogène, elle est fausse !
L'homogénéité d'une formule permet aussi de retrouver cette formule.

a) Exemple 1

L'expérience a montré que la force subie par une sphère immergée dans un fluide en mouvement dépend du coefficient de viscosité η du fluide, du rayon r de la sphère et de leur vitesse relative v. Trouver l'expression de cette force en la supposant de la forme : $f = k.\eta^a.r^b.v^c$, k est une constante sans dimension et $\dim(\eta) = [\eta] = L^{-1}MT^{-1}$.
Équation de dimensions : $LMT^{-2} = (L^{-1}MT^{-1})^a.L^b.L^c.T^{-c}$ d'où a = 1, b = 1, c = 1, c'est-à-dire : $f = k.\eta.r.v$ (formule de Stokes $f = 6.\pi.\eta.r.v$).

b) Exemple 2

L'expérience a montré que la fréquence de vibration N d'une corde dépend de la longueur ℓ, de la tension f, de la masse par unité de longueur μ de la corde. Trouver l'expression de cette fréquence.
Équation de dimensions : $\dim(N) = [N] = T^{-1}$, $\dim(\ell) = [\ell] = L$, $\dim(f) = [f] = MLT^{-2}$, $\dim(\mu) = [\mu] = ML^{-1}$; on a $N = k \cdot \ell^a \cdot f^b \cdot \mu^c$; soit $T^{-1} = L^a \cdot (MLT^{-2})^b \cdot (ML^{-1})^c$ d'où a + b − c = 0, b + c = 0, −2.b = −1 ; l'équation est donc de la forme $N = \frac{k}{\ell}\sqrt{\frac{f}{\mu}}$.

1.4 INCERTITUDES

Lorsqu'on mesure une grandeur A, quel que soit le soin apporté à la mesure, on n'obtient jamais la valeur vraie a_v mais une valeur mesurée a. Toute mesure est entachée d'une erreur qu'il est important de connaître ou tout au moins d'estimer.
Pour cela il faut examiner avec **un esprit très critique** la mesure : l'appareillage utilisé, la façon de l'utiliser, la méthode de mesure, ...

1.4.1 Vocabulaire

Le verbe « mesurer » et le terme « mesure » peuvent avoir plusieurs significations aussi est-on amené à utiliser des mots plus précis.
Mesurage : ensemble des opérations qui permettent de déterminer la mesure d'une grandeur.
Mesurande : grandeur que l'on veut mesurer.
Valeur vraie du mesurande : valeur qu'on obtiendrait si le mesurage était parfait.
Résultat d'un mesurage : valeur ou ensemble de valeurs donné à un mesurande.
Un mesurage n'étant jamais parfait, le résultat doit donc être sous la forme d'un intervalle associé à un niveau de confiance (on estime que la valeur vraie est située dans l'intervalle avec une certaine probabilité) :

$$a \pm \Delta a$$

où a est le résultat du mesurage et Δa l'incertitude.

1.4.2 Erreurs

Soit a le résultat du mesurage et a_v la valeur vraie du mesurande, l'erreur sur le résultat vaut $E = a - a_v$. Par principe, cette erreur est inconnue et il est nécessaire de déterminer une limite à cette erreur, c'est ce qu'on appelle l'incertitude.

Remarque

On définit aussi l'erreur relative par $E_{\%} = \dfrac{|a - a_v|}{a_v} \times 100$ et on doit aussi déterminer une limite appelée incertitude relative.

Du point de vue de leurs causes, il faut distinguer deux types d'erreurs : **les erreurs systématiques et les erreurs accidentelles.**

a) Les erreurs systématiques

Les erreurs systématiques ayant leur origine dans un défaut de l'appareil ou du mode opératoire se produisent **régulièrement, dans le même sens et avec une valeur constante**.

> ***Exemples***
>
> - utilisation d'un appareil mal étalonné ;
> - utilisation d'un appareil de mesures dont le « zéro » ne correspond pas à la valeur nulle ;
> - erreur de parallaxe sur un appareil analogique.
>
> Si l'erreur systématique est ignorée de l'expérimentateur, elle est grave et elle rend illusoire le degré d'exactitude qu'il croit pouvoir attribuer à ses mesures.

Si l'erreur systématique est connue, il suffit d'en supprimer la cause si cela est possible ou d'effectuer la correction nécessaire sur les résultats des mesures.
L'erreur systématique ne doit donc pas intervenir dans la détermination de l'incertitude sur une mesure.
On évite les erreurs systématiques ou on les corrige par une analyse critique des méthodes utilisées et par un contrôle des appareils.

b) Les erreurs aléatoires, accidentelles ou fortuites

Les erreurs aléatoires, accidentelles ou fortuites ont pour caractère essentiel de se manifester dans un **sens imprévisible, à un moment inconnu et avec une valeur variable**.

> ***Exemples***
>
> - Les erreurs de lecture. Nous éliminons l'erreur totale qui donne un résultat aberrant. Lors de la mesure d'une longueur avec une règle graduée au mm, dans le meilleur des cas on ne pourra pas faire une mesure avec une erreur inférieure à ¼ mm. En général, l'utilisation d'un appareil possédant une graduation entraîne une erreur de lecture d'une demi-division.
> - Les erreurs de fidélité de l'appareil. Elles existent si en répétant plusieurs fois la même mesure, on obtient des résultats différents. Ces erreurs proviennent du fait qu'il est impossible de se replacer exactement dans les mêmes conditions, les propriétés de l'appareil de mesures évoluant avec le temps. En général, le constructeur a étudié ce type d'erreur et indique quelle précision il peut garantir (classe de l'appareil).
> - Les erreurs dues à une mauvaise définition de la grandeur à mesurer. Ce sont ces erreurs qui souvent limitent la précision de la mesure : repérage du minimum (maximum) d'intensité lumineuse, de son. . .

1.4.3 Fidélité, justesse

On peut schématiser ces erreurs sous la forme d'une cible, le centre représentant la valeur vraie du mesurande (inconnue). Cela permet de mettre en évidence les notions de justesse et de fidélité.

Lorsque les valeurs de mesurage sont groupées vers le centre de la cible, on peut dire que la méthode de mesurage est fidèle et juste. Si elles sont peu groupées mais situées « en moyenne » vers le centre de la cible, la méthode est juste mais non fidèle du fait des erreurs aléatoires. Si elles sont groupées mais éloignées du centre, la méthode est fidèle mais non juste du fait d'erreurs systématiques et enfin si elles sont peu groupées et situées loin du centre de la cible, la méthode n'est ni juste ni fidèle par la présence d'erreurs aléatoires et systématiques.

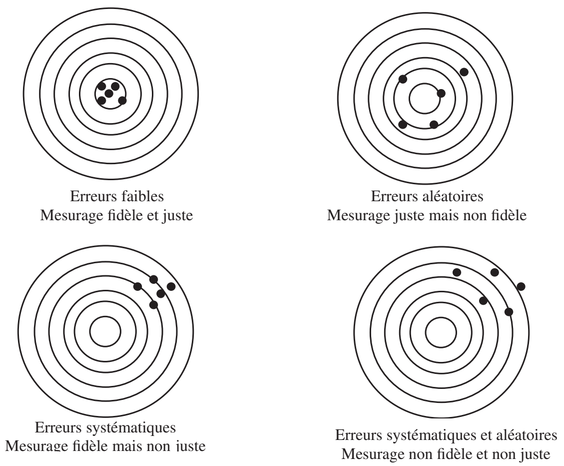

Figure 1.1

1.4.4 Incertitudes

L'incertitude permet de définir un intervalle de valeurs dans lequel on peut estimer, avec une certaine confiance, que la valeur vraie s'y trouve.
Dans la majorité des cas, on considère que les erreurs aléatoires (on admet qu'il n'y a pas d'erreurs systématiques) **suivent la loi normale** (gaussienne), on définit alors l'incertitude-type comme l'écart-type.

1.4.5 Loi normale

La loi normale $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}$ représente la densité de probabilité avec : $\overline{x}$ valeur moyenne de x et σ l'écart type de la distribution ($\sigma^2 = \overline{(x-\overline{x})^2}$). La probabilité que le résultat du mesurage soit compris entre les valeurs x_1 et x_2 est donnée par $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$ et est représentée par la surface sous la courbe $f(x)$. Cette probabilité vaut 68,3 % pour $x_2 - x_1 = 2\sigma$; 95,4 % pour 4σ et 99,7 pour 6σ (voir figure ci-dessous) :

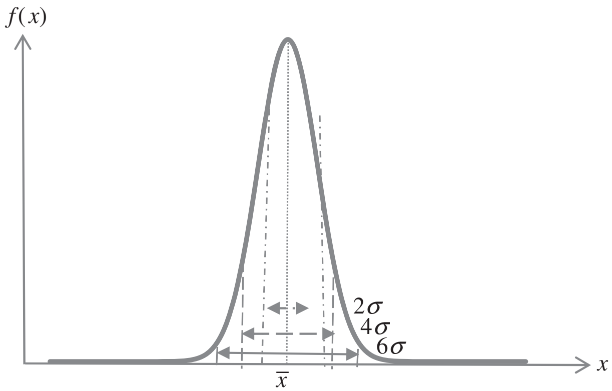

Figure 1.2

1.4.6 Évaluation des incertitudes

Un mesurage peut s'effectuer de différentes manières, soit à partir d'une série statistique (on effectue une série de mesures), on parle alors d'incertitudes de type A, soit à partir d'une seule mesure, on a alors des incertitudes de type B.

1.4.7 Évaluation des incertitudes de type A

Si on a effectué N mesures, la meilleure estimation du mesurande est la valeur moyenne $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_i x_i$. L'écart type de la distribution (cf. § 1.4.5) est $\sigma = \sigma_x = \sqrt{\dfrac{1}{N-1}\sum_i (x_i - \overline{x})^2}$. Le terme $N-1$ au lieu de N vient du fait que la formule utilise la valeur moyenne $\overline{x}$ et il est évident qu'on ne peut déterminer une valeur moyenne dans le cas d'une seule mesure.

La formule de propagation des incertitudes (cf. § 1.4.10) permet de déterminer l'écart type de la valeur moyenne $\sigma_{\overline{x}} = \dfrac{\sqrt{\sum_i \sigma^2}}{N} = \dfrac{\sigma\sqrt{N}}{N} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$ qui correspond à l'incertitude-type Δx notée aussi $u(x)$.

On aboutit ainsi au résultat final :

$$x = \overline{x} \pm \Delta x$$

Avec $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_i x_i$ et $\Delta x = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = \dfrac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\dfrac{1}{N-1}\sum_i (x_i - \overline{x})^2}$

Lorsque le nombre de mesures est faible, il faut alors corriger l'incertitude-type par le facteur t de Student, on a alors $\Delta x = t\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$ (incertitude-type élargie). La valeur de ce facteur dépend du nombre de mesures et de l'intervalle de confiance. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de t.

➤ *Pour un intervalle de confiance de 68 %*

Nbre de mesures	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	∞
t	1,84	1,32	1,20	1,14	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,03	1,01	1,00

Les résultats expérimentaux montrent qu'on peut très rapidement « oublier » le coefficient de Student et le prendre égal à 1.

➤ *Pour un intervalle de confiance 95 %*

Nbre de mesures	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	∞
t	12,7	4,30	3,18	2,77	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,09	2,02	1,96

On remarque que, très rapidement, le coefficient de Student tend vers 2.
Le passage de $t = 1$ à $t = 2$ correspond au passage de l'intervalle de confiance à 68 % à 95 %.

1.4.8 Évaluation des incertitudes de type B

Souvent, on ne dispose pas d'assez de temps pour effectuer une série de mesures, on se trouve dans le cas de l'évaluation d'une incertitude de type B. Il faut alors déterminer l'origine possible de toutes les erreurs expérimentales. Classiquement cela conduit à examiner deux types d'incertitudes ; celle concernant la lecture et celle concernant l'appareillage.

Les incertitudes-types sont évaluées à partir de lois de probabilités supposées à priori. La loi, la plus souvent utilisée et la moins optimiste, est la loi rectangulaire ou loi uniforme. Dans ce cas, la densité de probabilité $f(x)$ de la variable x vaut a entre les valeurs x_1 et x_2 et 0 à l'extérieur.

On a $f(x) = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} a\mathrm{d}x = 1$ soit $a = \dfrac{1}{x_2 - x_1}$ et la valeur moyenne $\overline{x} = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} ax\mathrm{d}x = \dfrac{a}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) = \dfrac{x_2 + x_1}{2}$.

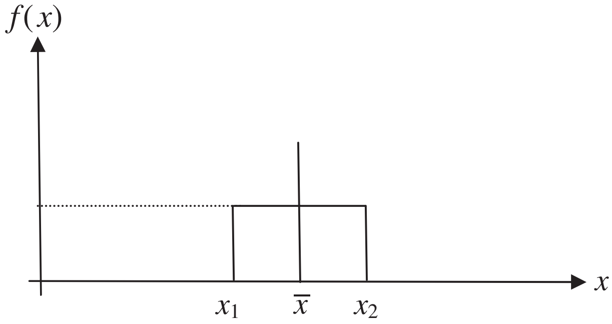

Figure 1.3

L'écart-type $\sigma^2 = \int_{x_1}^{x_2} a(x-\overline{x})^2 \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} ax^2 \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} a\overline{x}^2 \mathrm{d}x - 2\int_{x_1}^{x_2} ax\overline{x}\mathrm{d}x$ $= \frac{a}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right) - \overline{x}^2 = \frac{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}{3} - \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}$ d'où $\sigma = \frac{(x_2 - x_1)}{2\sqrt{3}}$.

a) Incertitude-type de positionnement

Lors d'un mesurage, si on estime que la valeur est comprise entre x_{max} et x_{min}, alors, d'après ce qui précède, on aura :

$$x = \frac{x_{\text{max}} + x_{\text{min}}}{2} \quad \text{et} \quad \Delta x_{68\,\%} = \sigma = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{2\sqrt{3}} = \frac{\delta}{2\sqrt{3}}.$$

Les calculs précédents sont effectués avec un intervalle de confiance de 68 % (coefficient de Student égal à 1).
Si on choisit intervalle de confiance de 95 % il faut multiplier par $k = 2$ (Student) et on obtient l'incertitude élargie à 95 % $\Delta x_{95\,\%} = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{\sqrt{3}} = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$.

b) Incertitude-type liée à un intervalle

Lors d'un mesurage, si on estime que la valeur mesurée x_0 est comprise dans l'intervalle $x_{\text{max}} = x_0 + \delta$ et $x_{\text{min}} = x_0 - \delta$, d'après ce qui précède on a $x_{\text{max}} - x_{\text{min}} = 2\delta$

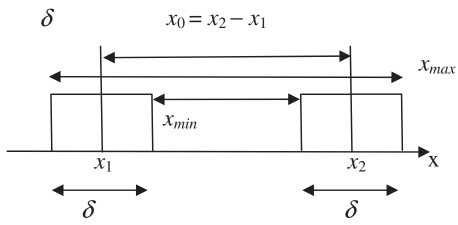

Figure 1.4

et on obtient : l'incertitude type $\Delta x_{68\,\%} = \dfrac{\delta}{\sqrt{3}}$. L'incertitude type élargie à 95 % est alors $\Delta x_{95\,\%} = 2\dfrac{\delta}{\sqrt{3}}$; où δ représente l'incertitude de mesure sur chaque position.

c) Incertitude type liée à la lecture

Lorsque la mesure est obtenue par lecture sur une échelle (thermomètre à alcool) ou sur un cadran (voltmètre analogique), l'incertitude liée à la lecture est, en général, estimée à une graduation. On se trouve dans une situation analogue à celle du positionnement, et l'incertitude type liée à la lecture est $\Delta x_{\text{lec}68\,\%} = \dfrac{1\,graduation}{2\sqrt{3}}$.
Avec un intervalle de confiance de 95 % on obtient l'incertitude type élargie $\Delta x_{\text{lec}95\,\%} = \dfrac{1\,graduation}{\sqrt{3}}$.
Si la mesure résulte d'une double lecture, par exemple, lecture d'une période sur un oscilloscope (on estime le point de début et le point de fin de la période) ou lecture d'une longueur sur une règle, alors l'incertitude de lecture est doublée et on passe à une incertitude type à $\Delta x_{\text{lec}68\,\%} = \dfrac{1\,graduation}{\sqrt{3}}$, avec une incertitude type élargie de 95 % $\Delta x_{\text{lec}95\,\%} = 2\dfrac{1\,graduation}{\sqrt{3}}$.

d) Quelques exemples

➤ *Incertitude type liée au positionnement*

Lors d'une manipulation en optique, la position d'une lentille, pour obtenir une image nette, est comprise entre 10,3 cm et 10,9 cm du fait de la « difficulté » à repérer la netteté de l'image. La valeur x de la position de la lentille sera prise égale à $\dfrac{10{,}3 + 10{,}9}{2} = 10{,}6$ cm et l'incertitude-type $\Delta x_{68\,\%} = \dfrac{10{,}9 - 10{,}3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\delta}{2\sqrt{3}}$ $= 0{,}17$ cm. L'incertitude type élargie à 95 % est alors $\Delta x_{95\,\%} = \dfrac{10{,}9-10{,}3}{\sqrt{3}} = 0{,}34$ cm.

➤ *Incertitude type liée à un intervalle*

On mesure une distance $D = 25$ cm entre un émetteur et un récepteur d'ultrasons. On estime l'incertitude sur cette mesure à $\delta = 1$ cm, alors l'incertitude type élargie sera $\Delta D_{95\,\%} = 2\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1{,}1$ cm.

➤ *Mesure avec un appareil analogique*

En premier lieu, il faut connaitre l'indication de la classe de l'appareil notée C. L'incertitude de construction δ_{Const} est alors égale à C % du calibre utilisé. L'incertitude de lecture δ_{lect} est par convention fixée à 1 graduation de l'échelle. Par exemple, avec un voltmètre de classe 1,5, utilisé sur le calibre 10 V et comportant 100 graduations sur l'échelle, on obtient une incertitude de construction de $\delta_{\text{Const}} = 1{,}5 \times 10/100 = 0{,}15$ V et de lecture de $\delta_{\text{lect}} = \dfrac{10}{100} = 0{,}10$ V. L'incertitude-type de construction, analogue à celle liée à un intervalle, est alors $\Delta C_{68\,\%} = \dfrac{\delta_{\text{Const}}}{\sqrt{3}}$ et l'incertitude-type de lecture est $\Delta L_{68\,\%} = \dfrac{\delta_{\text{lect}}}{2\sqrt{3}}$.

L'incertitude type totale vaut alors (voir § 1.4.10) : $\Delta x_{68\,\%} = \sqrt{(\Delta C_{68\%})^2 + (\Delta L_{68\%})^2} = 0{,}09$ V et pour un intervalle de confiance de 95 % $\Delta x_{95\,\%} = 0{,}18$ V.

➤ *Mesure de volume avec une burette*

L'incertitude de lecture de la mesure est estimée à $\delta_{\text{lect}} = 1$ graduation et l'incertitude-type élargie à 95 % est $\Delta M_{95\,\%} = \dfrac{\delta_{\text{lect}}}{\sqrt{3}}$.

➤ *Mesure avec un appareil numérique*

L'incertitude de construction est indiquée dans la notice de l'appareil. Elle résulte de la somme de deux termes, l'un lié au calibre utilisé et l'autre multiple de la valeur du dernier chiffre significatif (nD) affiché par l'appareil. C'est à partir de ces deux données constructeur que l'on calcule l'incertitude type.

Exemple

On utilise le multimètre MX 20 pour mesurer une tension continue sur le calibre 2 V. Pour ce calibre, le constructeur indique une incertitude de 1 % sur la mesure et une incertitude $nD = 8D$ sur l'affichage ; celui-ci comportant 4 chiffres. La valeur lue est $L = 1{,}876$ V, donc $D = 0{,}001$ V. L'incertitude de construction δ_{Const} sur cette mesure M est alors égale à $\delta_{\text{Const}} = \dfrac{1 \times 1{,}876}{100} + 8 \times\ 0{,}001 = 0{,}026$ V.

On effectue la mesure de cette même tension continue avec le multimètre MX554 sur le calibre 5 V. Pour ce calibre, le constructeur indique une incertitude de 0,05 % sur la mesure et une incertitude nD = 2D sur l'affichage ; celui-ci comportant 5 chiffres. La valeur lue est $L = 1{,}8760$ V, donc $D = 0{,}0001$ V. L'incertitude de construction δ_{Const} sur cette mesure M est alors égale à $\delta_{\text{Const}} = \dfrac{0{,}05 \times 1{,}8760}{100} + 2 \times\ 0{,}0001 = 0{,}0011$ V.

Dans les deux cas, l'incertitude type sur la mesure sera $\Delta M_{68\,\%} = \frac{\delta \text{Const}}{\sqrt{3}}$. Soit 0,015 V pour le MX20 et 0,00065 V pour le MX554. L'incertitude type élargie à 95 % sera $\Delta M_{95\,\%} = 2\frac{\delta \text{Const}}{\sqrt{3}}$. Soit 0,030 V pour le MX20 et 0,0013 V pour le MX554.

1.4.9 Tableau récapitulatif

Incertitudes de type A	
Sur une série de N mesures.	$\Delta x_{95\,\%} = 2\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}$
Incertitudes de type B	
Lecture simple sur une échelle (Thermomètre, burette...)	$\Delta L_{95\,\%} = \frac{1\,graduation}{\sqrt{3}}$
Lecture double sur une règle, un écran d'oscilloscope...	$\Delta L_{95\,\%} = 2\frac{1\,graduation}{\sqrt{3}}$
Mesure simple de position (incertitude de mesure δ)	$\Delta M_{95\,\%} = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$
Mesure de longueur (double position)	$\Delta M_{95\,\%} = 2\frac{\delta}{\sqrt{3}}$
Mesure sur un appareil numérique ($\delta_{\text{const}} = p$ %Lec + nD)	$\Delta M_{95\,\%} = 2\frac{\delta_{Const}}{\sqrt{3}}$
Mesure sur un appareil analogique de classe C $\left(\delta_{\text{const}} = \text{C \% du calibre et } \Delta C_{95\,\%} = 2\frac{\delta_{\text{Const}}}{\sqrt{3}}\right)$	$\Delta M_{95\,\%} = \sqrt{(\Delta C_{95\,\%})^2 + (\Delta L_{95\,\%})^2}$

1.4.10 Propagation des incertitudes

Supposons qu'une grandeur X soit liée à deux autres grandeurs indépendantes Y et Z : $X = f(Y, Z)$ dont les valeurs mesurées sont $\overline{y}$ et $\overline{z}$ avec une incertitude-type $\Delta y = \sigma_y$ et $\Delta z = \sigma_z$. Comment déterminer l'incertitude–type sur X ?
Effectuons un développement limité de la fonction f autour du point $(\overline{y}, \overline{z})$ (les incertitudes sont supposées faibles) :

$$x = f(y, z) = f(\overline{y}, \overline{z}) + (y - \overline{y})\,\frac{\partial f(\overline{y},\overline{z})}{\partial y} + (z - \overline{z})\,\frac{\partial f(\overline{y},\overline{z})}{\partial z} \tag{1}$$

La valeur moyenne de cette expression vaut :

$$\overline{x} = f\,(\overline{y},\overline{z}) + \overline{(y - \overline{y})}\frac{\partial f\,(\overline{y},\overline{z})}{\partial y} + \overline{(z - \overline{z})}\frac{\partial f\,(\overline{y},\overline{z})}{\partial z} = f\,(\overline{y},\overline{z})\,.$$